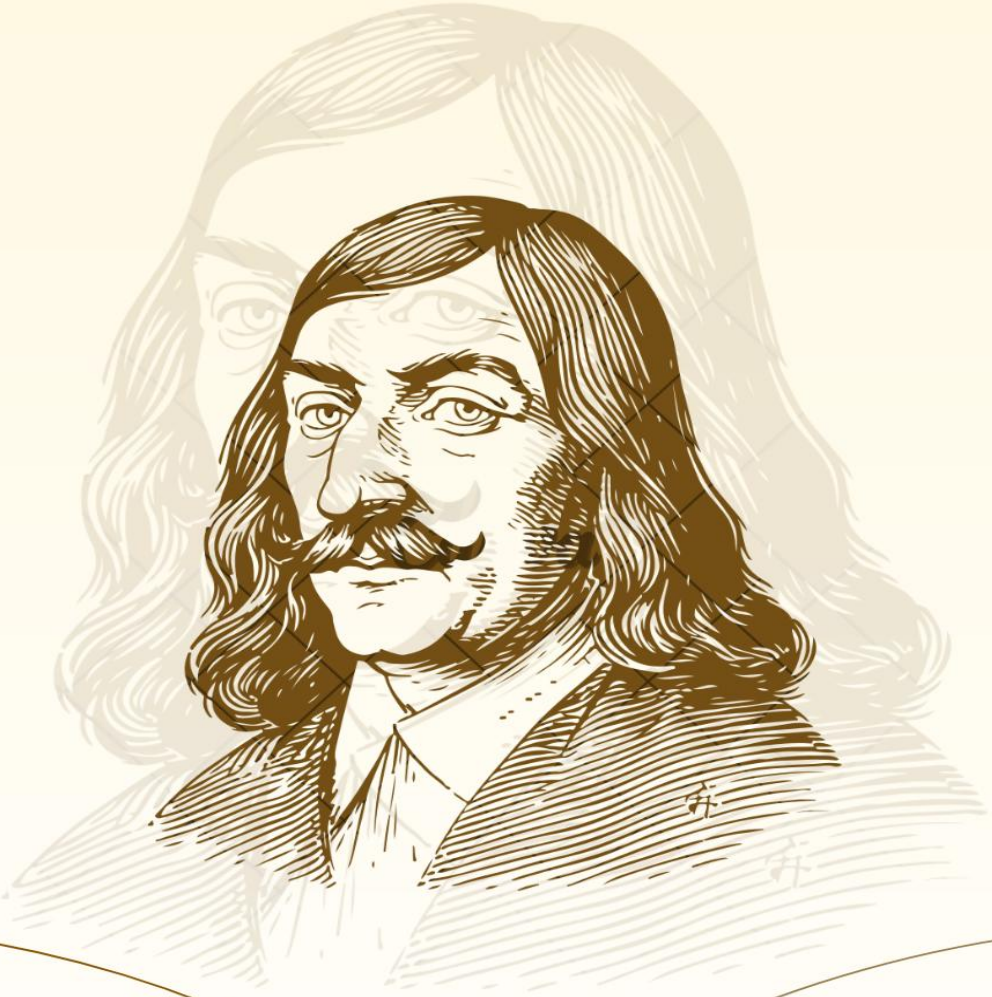
সমান্তরাল

২য় সংখ্যা | ডিসেম্বর ২০২৪ | পৌষ



সিমেডিয়ানস

শেভার উপপাদ্য

ফ্যালাসি সমাচার

কোয়ান্টাম কম্পিউটিং

সানিভা রাকিব সোহা

মোঃ ইব্রাহীম

এস এম এ নাহিয়ান

মো. রাদ্বীফ হাসান

সমান্তরাল

২য় সংখ্যা || ডিসেম্বর ২০২৪ || পৌষ ১৪৩১

সম্পাদনা

টিম সমান্তরাল

প্রচ্ছদ

মোঃ ইব্রাহীম

লে আউট

মোঃ ইব্রাহীম
জান্নাতুল মাওয়া সামিয়া

প্রকাশক

টিম সমান্তরাল

টাইপিং ও প্রুফ রিডার

মাহিদ হোসাইন আদিত্য
জান্নাতুল মাওয়া সামিয়া
কাজী মাহী
ইকুয়েশন ট্রাকার (ছদ্মনাম)
তাহমিদ জামান ত্বকী
মোঃ ইব্রাহীম

প্রকাশকাল

৩০শে ডিসেম্বর, ২০২৪

বিশেষ ধন্যবাদ

সমান্তরাল ওয়েব টিম

ই-মেইলঃ somantoral.magazine@gmail.com
ওয়েবসাইটঃ https://somantoral.pages.dev/
ফেসবুকঃ https://fb.com/somantoral.magazine/

উৎসর্গ

"গাহি সাম্যের গান, মানুষের চেয়ে কিছু নাই, নহে কিছু মহীয়ান"

শোষণ ও বঞ্চনার বিরুদ্ধে মানুষের ছাত্রজনতার পদক্ষেপ যেনো সাম্যবাদী চেতনা এবং দেশপ্রেমকে স্মরণ করিয়ে দেয়। তারাই দেশের জন্য জীবনদানকারী ব্যক্তিত্ব। সময়ের সাথে এসব ছাত্ররাই দেশের কাঠামো গঠন করবে,দেশকে নিয়ে যেতে পারবে অনন্য উচ্চতায়। এই আলোকিত প্রজন্মকে নিয়ে আছে আমাদের আকাশচুম্বী প্রত্যাশা।

বৈষম্যবিরোধী ছাত্র আন্দোলনের শিক্ষার্থীদের এবং আত্মত্যাগকারী সকল শহিদদের জন্য বিনম্র শ্রদ্ধা

সম্পাদকীয়

আমরা মনেপ্রাণে বিশ্বাস করি গণিত শিক্ষা এবং বিশ্লেষণধর্মী চিন্তা হয়ে উঠতে পারে নতুন বাংলাদেশ গঠনের অন্যতম প্রধান অস্ত্র। এই অস্ত্রকে শাণিত করার জন্য আমাদের প্রয়োজন নতুন প্রজন্মকে গণিতের প্রতি আগ্রহী করে তোলা। কেবল বইয়ের অনুশীলনী নয় গণিত ব্যবহার হয় রোগ নির্ণয় করতে, অর্থনৈতিক সমস্যা সমাধান করতে, এমনকি পদার্থবিজ্ঞানের দুনিয়ায় ঘুরে বেড়াতে। নানা ঘরানার গণিত ও গাণিতিক চিন্তাধারা নিয়েই আমাদের এই প্রচেষ্টা।

আমাদের লক্ষ্য "সমান্তরাল" বাংলাদেশকে এক গাণিতিক বাংলাদেশে রূপান্তরে ভূমিকা রাখবে। সমান্তরাল গঠনের মূল অনুপ্রেরণা ছিল হংকং- এর আন্তর্জাতিক ম্যাগাজিন Mathematical Excalibur.

২০২৩ সালেই সমান্তরাল নিয়ে কাজ শুরু হয়। '২৪ এর জানুয়ারির ২৮ তারিখ এর প্রথম সংখ্যা প্রকাশ হয়। এই সংখ্যা প্রকাশ করতে গিয়ে আমরা বেশ কিছু প্রতিবন্ধকতার সম্মুখীন হয়েছি। আমাদের কাজ সহজ হয়েছে এমন কিছু উৎসাহী মানুষদের জন্য যারা নিজেদের সর্বোচ্চটা দিয়ে পরিশ্রম করেছে প্রকাশনার কাজে।

অর্থ যেন গণিত শিক্ষার পথে বাধা না হতে পারে সেজন্য আমরা এটি প্রকাশ করছি সম্পূর্ণ অনলাইন এ। তবে পরিচালনায় থাকা আমরা সবাই শিক্ষার্থী হওয়ায় প্রকাশনার সময় একটু অনিয়মিত।

আরো একটা মজার ব্যাপার হচ্ছে আমাদের সম্পূর্ণ প্রক্রিয়া পরিচালিত হয় স্বেচ্ছাসেবক দের দিয়ে।

চাইলে তুমিও যোগদান করতে পারো এই গাণিতিক আন্দোলনে!! গণিতের এমন কিছু যা তুমি সবাইকে শেখাতে চাও, তা পাঠিয়ে দাও নিচের ইমেইল অ্যাড্রেসে:
somantoral.magazine@gmail.com

আর সবশেষে, জয়তু গণিত!

সূচিপত্র

বিষয়বস্তু	পৃষ্ঠা
শেভার উপপাদ্য	০৩
সিমেডিয়ান	০৫
ফ্যালাসি সমাচার	০৯
কোয়ান্টাম কম্পিউটিং	১১

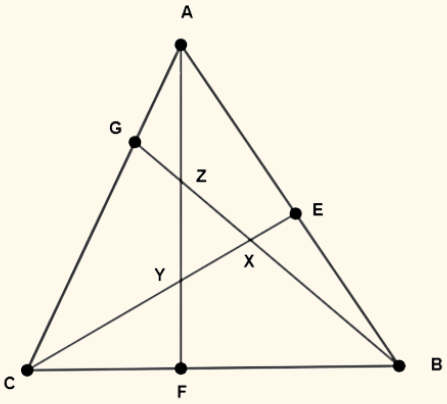
নিজের লেখা পাঠাও!!!

তুমি কি একজন গণিতপ্রেমী!? লেখালেখি করতে পছন্দ কর!? তো আর দেরি করো না। ঝটপট লিখে ফেলো গণিত নিয়ে তোমার ভাবনা। লেখাগুলো পাঠাতে পারো আমাদের ইমেইলে। লেখার সাথে নিজের সম্পূর্ণ নাম, শিক্ষাপ্রতিষ্ঠানের নাম দিতে ভুলো না যেন!!! প্রতি সংখ্যার ক্রমান্বয়ে প্রকাশিত হবে বাছাই করা লেখাগুলো। লেখা শুরু করেছো তো???

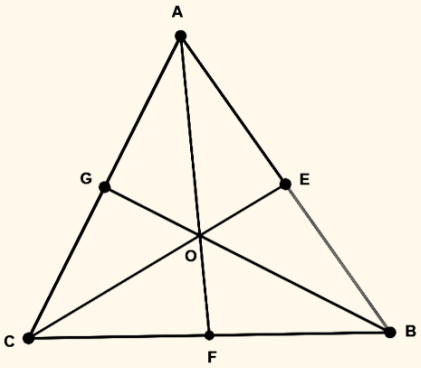
শেভার উপপাদ্য

~ মোঃ ইব্রাহীম

আচ্ছা পাঠ্য বইয়ে আমরা তো বিভিন্ন ধরনের উপপাদ্য করে থাকি। বিভিন্ন জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে আমরা সেই সকল উপপাদ্য আমাদের কাজে লাগে। তবে এর বাইরেও কিন্তু রয়েছে অনেক উপপাদ্য। আজ আমরা তেমনি একটি উপপাদ্য নিয়ে কোথা বলব। এই উপপাদ্যটি হলো শেভার উপপাদ্য।



চিত্র ১



চিত্র ২

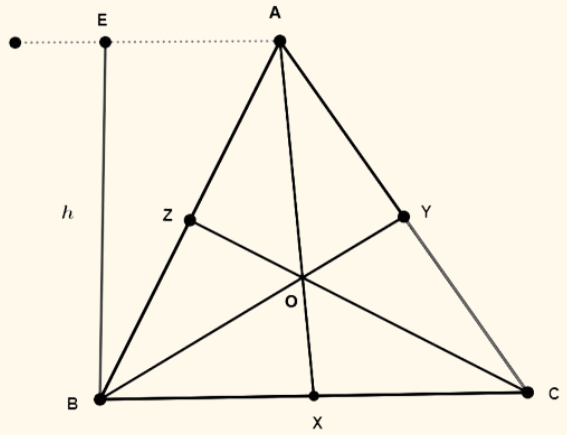
উপরে ১ম চিত্রে ABC একটি ত্রিভুজ। AB বাহুর উপর একটি বিন্দু E, BC বাহুর উপর একটি বিন্দু F এবং AC বাহুর উপর একটি বিন্দু G. এখন আমরা বাহুর উপর অবস্থিত বিন্দু থেকে ঐ বাহুর বিপরীত বিন্দু অর্থাৎ, ঐ বাহুর বিপরীত কোণের শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত একটি রেখাংশ আঁকব। ফলে AF, BG, CE – রেখাংশ তৈরি হবে। যারা পরস্পরকে ছেদ করার মাধ্যমে XYZ ত্রিভুজটি তৈরি হয়।

এখন আমাদেরকে একটি ক্রম অনুসরণ করতে হবে। আমরা AE, EB, BF, FC, CG, GA বা AG, GC, CF, FB, BE, EA – এই ক্রমটি অনুসরণ করব। আমি প্রথম ক্রমটি অনুসরণ করছি এখানে। যদি,

$$\frac{AE}{EB} \times \frac{BF}{FC} \times \frac{CG}{GA} = 1 \dots\dots\dots\dots\dots (i)$$

যদি ১ নং সমীকরণ সত্য হয় তবে আম চিত্রের X, Y, Z – বিন্দুকে আমরা দ্বিতীয় চিত্রের O – বিন্দুর সাথে তুলনা করতে পারি। অর্থাৎ, যদি ১নং সমীকরণ সত্য হয় তবে X, Y, Z – এই তিনটি একই বিন্দু হিসেবে গণ্য হবে। অর্থাৎ, ΔXYZ – এর ক্ষেত্রফল হবে শূন্য। থিওরি তো জানা হয়ে গেলো এখন তোমার মনে হতে পারে এর কি কোন প্রমাণ নেই? অবশ্যই আছে। তো চলো এবার প্রমানটি

দেখে নেয়া যাক -



চিত্র ৩

চিত্র ৩ এ BE হলো ABC ত্রিভুজের উচ্চতা। Z হলো AB এর মধ্যবিন্দু, X হলো BC এর মধ্যবিন্দু এবং Y হলো CA এর মধ্যবিন্দু। মধ্যবিন্দুগুলো থেকে সেই বাহুর বিপরীত কোণের শীর্ষবিন্দুর সাথে রেখা টানা হয়েছে। ফলে AX, BY, CZ – পরস্পর O – বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,

$\frac{AY}{YC} \times \frac{CX}{XB} \times \frac{BZ}{ZA} = 1$ হবে।

প্রমাণঃ

ধরি,

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ; ABC ত্রিভুজের উচ্চতা h; OBX & OCX - ত্রিভুজের উচ্চতা h_1

আমরা জানি,

ত্রিভুকের ক্ষেত্রফল $\Delta = \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

চিত্র ৩ অনুসারে,

$$\frac{BX}{CX} = \frac{(\frac{1}{2} \times BX \times h)}{(\frac{1}{2} \times CX \times h)}$$

$$= \frac{\Delta ABX}{\Delta ACX} \dots\dots\dots (i)$$

$$= \frac{\Delta OBX}{\Delta OCX} \left[\frac{BX}{CX} = \frac{(\frac{1}{2} \times BX \times h_1)}{(\frac{1}{2} \times CX \times h_1)}\right] \dots\dots\dots (ii)$$

এখন ১নং সমীকরণের হর থেকে ২নং সমীকরণের হর এবং ১নং সমীকরণের লব থেকে দুই নং সমীকরণের লব বিয়োগ করি,

$$\frac{BX}{CX} = \frac{\Delta ABX - \Delta OBX}{\Delta ACX - \Delta OCX}$$

$$= \frac{\Delta AOB}{\Delta AOC}$$

আবার,

$$\frac{CY}{YA} = \frac{\Delta BOC}{\Delta AOB} ; \frac{AZ}{ZB} = \frac{\Delta AOC}{\Delta BOC} ;$$

সুতরাং, $\frac{AY}{YC} \times \frac{CX}{XB} \times \frac{BZ}{ZA} = \frac{\Delta AOB}{\Delta AOC} \times \frac{\Delta BOC}{\Delta AOB} \times \frac{\Delta AOC}{\Delta BOC}$ এখানে এদের গুণফল হবে ১ এবং সেই সাথে প্রমাণিত হয়ে গেল আমাদের **শেভার উপপাদ্য**। আবার এটিকে কিন্তু বিপরীত ভাবেও ব্যবহার করতে পারো তোমরা।

এবার তোমরা অন্যান্য উপপাদ্যের পাশাপাশি এটিও বিভিন্ন জ্যামিতিক প্রমাণে ব্যবহার করতে পারবে। তো আজ এখানেই শেষ করছি আজকের যাত্রা।

প্রাকটিসঃ

১) ইব্রাহীম একদিন বিভিন্ন ধরণের ত্রিভুজ আঁকছিল। সে $\triangle PQR$ নামক একটি ত্রিভুজ এঁকেছে যার PQ, QR, PR বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13, 15 ও 14। $\frac{PF}{FQ} = \frac{2}{5}$ এবং $\frac{PE}{ER} = \frac{8}{5}$ হলে QD ও DR এর মান নির্ণয় কর।

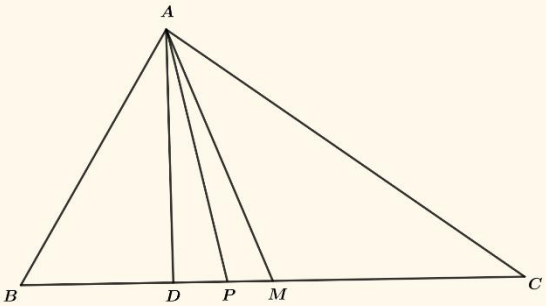
(D, E, F হলো QR, PR ও PQ বাহুর উপরস্থ বিন্দু যা প্রদত্ত সম্পর্ককে সমর্থন করে)

সিমেডিয়ান

~ সানিভা রাকিব সোহা

কোন ত্রিভুজের যেকোনো একটি শীর্ষ বিন্দুতে অঙ্কিত ত্রিভুজের কোণের সমদ্বিখন্ডকের সাপেক্ষে ঐ শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত মধ্যমার Reflection Line-ই হল ঐ বিন্দুতে Symmedian.

ধরি, ΔABC এ, AP, $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক। AM মধ্যমা।

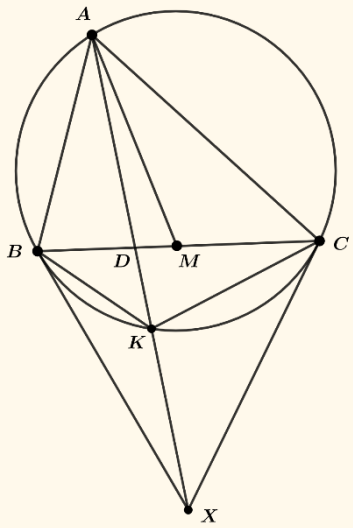


অর্থাৎ, AD Symmedian হবে যদিও কেবল যদি $\angle BAD = \angle MAC$ ।
[AD = Reflection of AM w.r.t AP]

Symmedians এর কিছু সুন্দর সুন্দর properties আছে, চল দেখে নেওয়া যাক,

Lemma 1 :
Construction of Symmedian :

ধরি, (ABC) এর B ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শদ্বয় X বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে AX হবে A বিন্দুতে ΔABC এর Symmedian।



প্রমাণ:
BC এর উপরে এমন একটি বিন্দু M নিই; যাতে $\angle MAC = \angle BAX$ হয়। তাহলে,

$\angle KAB = \angle MAC$ এবং $\angle BKA = \angle MCA$

[বৃত্তের একই চাপের (BA) উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো সমান]

$$\therefore \Delta BAK \sim \Delta MAC \Rightarrow \frac{BK}{KA} = \frac{MC}{AC} - - - (i)$$

অনুরূপভাবে,

$$\Delta KAC \sim \Delta BAM \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BM} - - - (ii)$$

(i) ও (ii) গুণ করে পাই,

$$\frac{BK}{KC} = \frac{MC}{BM} \times \frac{AB}{AC}$$

এখন, $\angle KBX = \angle BAX$

[Alternate Segment Theorem]

$\therefore \Delta BKX \sim \Delta ABX$

$\therefore \frac{BK}{KX} = \frac{AB}{BX} - - - (iii)$

অনুরূপভাবে, $\Delta KCX \sim CAX$

$\therefore \frac{KC}{KX} = \frac{XC}{AC}$

এখন যেহেতু, XB ও XC উভয়ই স্পর্শক, $\therefore XB = XC$

(iii) ও (iv) গুন করে পাই,

$$\boxed{\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC}}$$

$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{MC}{BM} \times \frac{AB}{AC}$

$\therefore \frac{MC}{BM} = 1$

$\therefore MC = MB$

$\therefore M$ মধ্যমা এবং $\angle BAX = \angle MAC$

$\therefore AX$ একটি Symmedian।

(প্রমাণিত)

Lemma 2 :

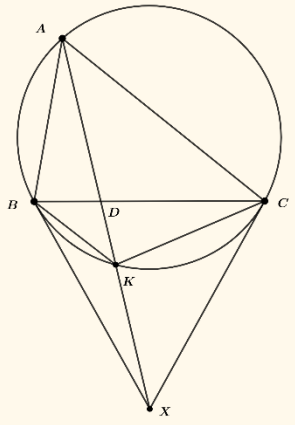
প্রমাণ কর যে, $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

প্রমাণ:

পূর্বের প্রমাণে আমরা দেখেছি যে,

$$\boxed{\frac{KC}{BK} = \frac{AB}{AC}}$$

এখন,



$\angle KBD = \angle DAC$

$\angle BKD = \angle DCA$

$\therefore \Delta DBK \sim \Delta DAC$

$\Rightarrow \frac{BD}{BK} = \frac{AD}{CA}$

$\therefore BD = \frac{AD}{CA} \times BK$

অনুরূপভাবে, $\frac{DC}{KC} = \frac{AD}{AB}$

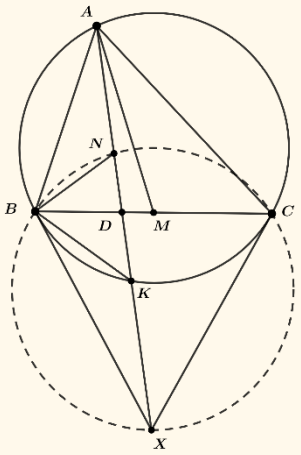
$\therefore DC = \frac{AD}{AB} \times KC$

$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BK}{KC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

(প্রমাণিত)

Lemma 3 :

প্রমাণ কর যে, ΔBCX এর পরিবৃত্ত AK এর মধ্যবিন্দু দিয়ে যায়।



প্রমাণ:

AK রেখা, A - symmedian এবং M, BC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \angle BAK = \angle MAC$ এবং $\angle ACM = \angle AKB$

$\therefore \Delta MAC \sim \Delta BAK$

$\therefore \frac{MC}{AC} = \frac{BK}{AK}$

$\Rightarrow \frac{MC}{AC} = \frac{BK}{2\,NK}$ [N, AK এর মধ্যবিন্দু]

$\Rightarrow \frac{2\,MC}{AC} = \frac{BK}{NK}$

$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{BK}{NK}$ এবং $\angle BKN = \angle BCA$

$\therefore \Delta BNC = \Delta BNK$

$\Rightarrow \angle BNK = \angle BNC$

আবার, যেহেতু, XC স্পর্শক

$\therefore \angle BCX = \angle BAC$ **[Alternate Segment Theorem]**

$\therefore \angle BNK = \angle BAC = \angle BCX$

$\therefore B, N, C, X$ বিন্দু চারটি একই বৃত্তের ওপর অবস্থিত।

$\therefore O(BCX)$ AK এর মধ্যবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

(প্রমাণিত)

Note: $ABKC$ চতুর্ভুজটিকে হারমনিক quadrilateral বলে। এই ratio টি সবসময় সত্য হবে এটির প্রমান আমরা Lemma 1 এ দেখেছি।

এক্ষেত্রে, $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC}$

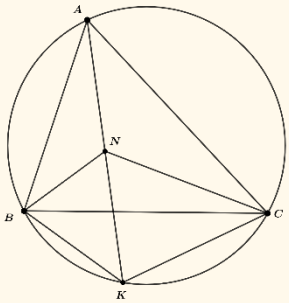
এখন তোমাদের জন্য দুটি ছোট সমস্যা দেওয়া যাক। নিজে নিজে চেষ্টা করবে সমস্যা দুটি।

1 BC হচ্ছে ΔBAK এর B - symmedian এবং ΔCAK এর C - symmedian

2 BC হচ্ছে $\angle AMK$ এর internal angle bisector

Note:

Symmedian জ্যা এর মধ্যবিন্দুকে বলে Dumpty Point



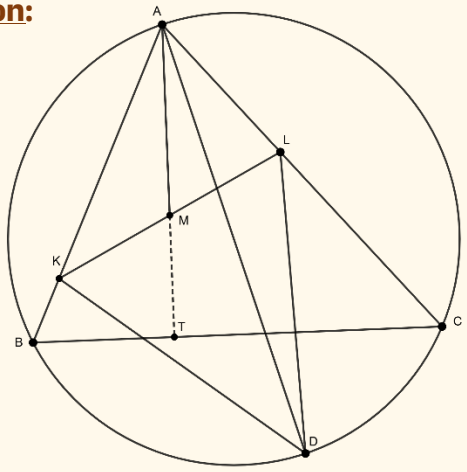
অর্থাৎ এখানে, AK symmedian এর মধ্যবিন্দু N হচ্ছে ΔABC এর A - Dumpty Point.
এখানে,
$\angle ABN = \angle NAC, \angle BAN = \angle ACN$ হবে

এখন আমরা ইজিএমও ২০২৩ আলের Problem - 2 এর solution করার চেষ্টা করব।

সমস্যা:

ΔABC এর পরিবৃত্তের ওপরে D এমন বিন্দু যাতে AD ব্যাস হয়। AB ও AC এর ওপরে যথাক্রমে K ও L এমন বিন্দু যাতে DK & $DL, O(AKL)$ এর স্পর্শক। প্রমাণ কর যে, KL, ΔABC এর লম্ববিন্দু (orthocenter) দিয়ে অতিক্রম করে।

Solution:



KL এর মধ্যবিন্দু M নিই।

যেহেতু, DK ও $DL, O(AKL)$ এর স্পর্শক তাই, AD হচ্ছে ΔAKL এর A - symmedian বা A বিন্দুতে অঙ্কিত symmedian. অর্থাৎ $\angle MAK = \angle DAL$

ধরি, AM, BC কে T বিন্দুতে ছেদ করে,

$\angle BAT = \angle DAC$, $\angle ABT = \angle ADC$
$\angle ATB = \angle ACD = 90°$ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ]
$\therefore AM \perp BC$

যেহেতু, $DK = DL$ এবং, M, KL এর মধ্যবিন্দু
$\therefore DM \perp KL$ & $DMK = 90^0$

আবার, $\angle DBK = \angle DBA = 90°$
$\therefore \angle DBK + \angle DMK = 180°$

$\therefore K, M, D, B$ বিন্দু চারটি একই বৃত্তের পরে অবস্থিত।

$\therefore \angle KBM = \angle KDM = 90^0 - \angle MKD$

$= 90^0 - \angle KAL$

$= 90^0 - \angle A$

Alternate Segment Theorem অনুযায়ী,
$\angle MKD = \angle KAL$

$\therefore \angle ABM = 90^0 - \angle A$
$\therefore BM \perp AC$

আবার আমরা পেয়েছি $AM \perp BC$

$\therefore M$ - ই হচ্ছে ΔABC এর লম্ববিন্দু।
$\therefore \Delta ABC$ এর লম্ববিন্দু KL এর ওপরে অবস্থিত।

(প্রমাণিত)

তোমাদের প্র্যাকটিসের জন্য একটি মজার সমস্যা দিলাম। এটি নিজে চেষ্টা করে সমাধান করার Try করবে।

সমস্যাটি:

সূক্ষ্মকোণী ΔABC এ $CA \neq CB$, ΔABC এর পরিবৃত্ত ω এবং পরিবৃত্ত (circumcenter) O. t_A ও t_B ω এর A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় যারা পরস্পরকে X বিন্দুতে ছেদ করে। O থেকে CX এর ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু Y। অঙ্কিত C বিন্দু থেকে, AB এর সমান্তরাল রেখা ও t_A; Z বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, YZ রেখাটি AC এর মধ্যবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

ফ্যালাসি সমাচার

~ এস এম এ নাহিয়ান

তোমার সাথে কখনো তর্কের এমন কি হয়েছে যে তোমার মনে হচ্ছে অপরজন ভুল যুক্তি দিচ্ছে বাট তুমি ধরতে পারছো না। হয়ে থাকলে সেখানে দুটো পসিবিলিটি আছে, ১) তোমার যুক্তি তেই ভুল রয়েছে, ২) অপরজন তোমাকে কোন কুযুক্তি বা লজিকাল ফ্যালাসির ফাঁদে ফেলছে। তাই আমরা এখন কিছু প্রচলিত লজিকাল ফ্যালাসির টাইপ সম্পর্কে জানবো। যেন পরেরবার কেউ তোমাকে কুযুক্তির ফাঁদে ফেলতে না পারে এবং তুমিও কখনো কুযুক্তি ব্যাবহার না করো (শেষ টি মিস করোনা কিন্তু)

১) The Straw Man Fallacy:
ধরো, তুমি একটা যুক্তি দেওয়ার পর অপরজন সেটিকে আরও জেনারালাইজ করে ফেলে (Straw Man তৈরি করা) যেন সেটিকে সহজে খণ্ডন করা যায়। তবে সেটি হবে Straw Man Fallacy।

যেমনঃ তুমি বললে, "আমাদের টিমে রহিম অনেক ট্যালেন্টেড।" আর অপরজন বলে বসলো, "তুমি বলতে চাচ্ছো টিমের বাকিরা ট্যালেন্টেড না।" তারপর সেটার বিরুদ্ধে বলল।

এক্ষেত্রে সে তোমার বক্তব্যকে খণ্ডন করেনি বরং তার নিজের বানানো বক্তব্যকে খণ্ডন করেছে।

২) The Bandwagon Fallacy:
শুধুমাত্র "অনেকে মনে করে" এর জন্যই কোন একটি ব্যাপারকে সত্য ধরে নেওয়া হলে সেটা হবে The Bandwagon Fallacy।

যেমনঃ তোমার বন্ধু IPhone ব্যাবহার করে, সে তোমাকে বললো, "দেখ, বেশিরভাগ মানুষই আইফোনে প্রেফার করে। তাই আইফোনই ভালও।"
প্রেফার করে"। তাই এটি একটি লজিকাল ফ্যালাসি।

এখানে, হতে পারে আইফোন ই ভালো, কিন্তু সেটা এই কারণে নয় যে "বেশিরভাগ মানুষই আইফোনে প্রেফার করে"। তাই এটি একটি লজিকাল ফ্যালাসি।

৪) The False Dilemma Fallacy:
যেকোনো কিছুকেই শুধু দুটো অপশনের মাধ্যমে দেখা।

যেমনঃ ধরো কোন গ্রুপ প্রজেক্টে দলের একজন বললো, "তাহলে এখন হয় আমার প্লান অনুযায়ী চলো অথবা প্রজেক্ট ক্যান্সেল করতে হবে।"
এখানে সে যেটা মিস করছে সেটা হল, আরও অনেক পথ থাকতে পারে প্রজেক্টটিকে চালানোর মতো।

৫) The Ad Hominem Fallacy:
যখন কেউ মুল বক্তব্যের ব্যাপারে আলোচনা না করে সরাসরই বক্তাকে আক্রমণ করতে থাকে তখন সেটি হয় Ad Hominem Fallacy।

যেমনঃ তুমি বললে "আমাদের কাজ গুলো আবার চেক করে দেখা দরকার যেন কোন ভুল থেকে না যায়।"
আর তোমার বন্ধু বললো, "জানতাম তুমি এটা বলবে, তুমি তো ভুল ছাড়া কাজই করতে পারোনা"
এখানে সে তোমার বক্তব্যয়ের ব্যাপারে কথা না বলে শুধু তোমাকে আক্রমণ করেছে।

৬) Cherry Picking
অনেকগুলো ঘটনার মধ্যে শুধু নিজের মুল বক্তব্যয়ের

সাথে সামঞ্জস্যপুর্ন ঘটনা তুলে ধরা কিন্তু বাকি গুলোকে উপেক্ষা করা।

যেমনঃ "রাত জেগে পড়লে ডাক্তার হওয়া যায়। দেখ, রহিম রাত জেগে পড়তো তাই ডাক্তার হয়ে গেছে।"
এখানে সমস্যা হল, অনেক মানুষ যে রাত জেগে পড়েও ডাক্তার হয়নি সেটিকে উপেক্ষা করে গিয়েছে।

৭) Appeal to Authority:
যখন কেউ কোন কিছু প্রমাণ করতে কোন ব্যাক্তির দেওয়া মতামতকে টেনে আনে।

যেমনঃ কেউ ক্লাস ফাকি দেওয়ার কারণ হিসেবে বললো, "আমার এক বড়ভাই বলেছে ক্লাস ফাকি দেওয়া খারাপ কিছুনা।"
এখানে সে কারো ব্যাক্তিগত মতামতকে সত্য ধরে নিয়েছে যা নাও হতে পারে

৮) The Fallacy Fallacy:
এটা সবচেয়ে মজাদার। ধরো কেউ একজন একটা বক্তব্যকে প্রমাণ করতে ভুল যুক্তি ব্যাবহার করলো। তুমি সেটা ধরতে পারলে। এবং তাই ধরে নিলে যে সে যা ক্লেইম করছিলো টা ভুল। তাহলে এটি হবে The Fallacy Fallacy।

যেমনঃ আমরা যদি The Bandwagon Fallacy এর উদাহরণ টাই খেয়াল করি, তোমার বন্ধু ভুল যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করেছে আইফোন ভালো, তার যুক্তি দিয়ে আইফোন ভালো হয়ে যায়নি। তবে খারাপও হয়ে যায়নি।

কোয়ান্টাম কম্পিউটিং

~ মোঃ রাদ্বিফ হাসান

আমরা সবাই আমাদের দৈনন্দিন প্রয়োজনে কমবেশি কম্পিউটার ব্যবহার করি। আমরা যখন কম্পিউটারের মাধ্যমে কোনো কাজ করি তখন কম্পিউটার আমাদের কাছ থেকে ইনপুট নেয় এবং বাইনারি সংখ্যায় রূপান্তর করে। এই ডিজিটাল সিস্টেমে তথ্যের প্রবাহের জন্য ***ASCII*** বা ***UNICODE*** সহ আরও অনেক কোড তৈরি করা হয়েছে তবে এর মূলে রয়েছে 0 এবং 1 যেটা বাইনারি নম্বর সিস্টেম হিসেবে পরিচিত। আবার আমাদের দৈনন্দিন জীবনে আমরা বিভিন্ন ইলেকট্রনিক্স ডিভাইস ব্যবহার করে কাজ করি, এই কাজের মূলেও থাকে 0 ও 1।

আজকের যুগে আমরা যে ট্রানজিস্টর, মাইক্রোচিপ ইত্যাদি ছোট ছোট ইলেকট্রনিক্স কম্পনেন্টস ব্যবহার করি এর মুলেও কিন্তু রয়েছে সেই 0 এবং 1।

আজকাল আমরা আমাদের দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন কাজ এবং সমস্যা সমাধানের জন্য সাধারণ কম্পিউটার ব্যবহার করি এবং কিছু ক্ষেত্রে দেখা যায় যে আমাদের আধুনিক কম্পিউটারগুলি কিছু সমস্যা সমাধান করতে যথেষ্ট সময় নেয় এবং এই সমস্যা থেকে মুক্তি পেতে বিজ্ঞানীরা সুপার কম্পিউটার তৈরি করেছেন যা আমাদের সময়কে কমিয়ে দিয়েছে। কিন্তু আজকের সুপারকম্পিউটারগুলিও জটিল গণনা এবং সমস্যা সমাধান করতে হিমশিম খাচ্ছে এবং কিছু কিছু ক্ষেত্রে হাজার হাজার থেকে কয়েক লক্ষ বছর সময় নিতে পারে। এই অবস্থা থেকে উত্তরণের জন্য কোয়ান্টাম কম্পিউটিং এর ধারণাটি প্রথম প্রস্তাব করেছিলেন পদার্থবিজ্ঞানী রিচার্ড ফাইনম্যান 1982 সালে আমেরিকান ফিজিক্যাল সোসাইটির বার্ষিক সভায় "***Simulating Physics with Computers***" শিরোনামের একটি বক্তৃতার সময়।

কোয়ান্টাম কম্পিউটিং সম্পর্কে জানার আগে আমাদের প্রথমে কোয়ান্টাম মেকানিক্স সম্পর্কে জানতে হবে কোয়ান্টাম মেকানিক্স হলো পদার্থের অতিপারমাণবিক পর্যায়ের বিজ্ঞান যা আধুনিক পদার্থবিদ্যার একটি শাখা। কোয়ান্টাম মেকানিক্স পদার্থের অতিপারমাণবিক স্তর নিয়ে কাজ করে। যখন আমরা একটি মৌলের ইলেক্ট্রন বিন্যাসের ডায়াগ্রাম দেখি তখন আমরা সাধারণত একটি নির্দিষ্ট কক্ষপথে ইলেক্ট্রনকে চলমান দেখতে পাই কিন্তু প্রকৃতপক্ষে ইলেকট্রন সেই কক্ষপথের সমস্ত জায়গাজুড়ে উপস্থিত থাকে যাকে কোয়ান্টাম সুপারপজিশন বলে। একটি ইলেক্ট্রনের অবস্থান এবং গতিবেগ একই সাথে এবং সুনির্দিষ্টভাবে নির্ধারণ করা অসম্ভব। আবার অবস্থান যদি সুনির্দিষ্টভাবে জানা যায়, তাহলে সুপারপজিশন ভেঙ্গে যাবে। বিষয়টাকে সহজভাবে বোঝার জন্য একটি কয়েন কল্পনা করো যার একপাশ হেড অন্য পাশ টেল। এখন তুমি যখন এটিকে টস করার জন্য উপরে নিক্ষেপ করবে তখন এটি একই সাথে হেড এবং টেল উভয় অবস্থাতেই থাকবে কারণ এটি মাটিতে না পড়া পর্যন্ত আমরা বলতে পারবো না যে এটি হেড বা টেল হবে এবং এটিই কোয়ান্টাম সুপারপজিশন। কোয়ান্টাম সুপারপজিশন তখনই ভেঙ্গে যাবে যখন আমরা মাটিতে পড়ার পর এর সুনির্দিষ্ট অবস্থান (অর্থাৎ হেড বা টেল) পাবো। 1980 সালে ফাইনম্যান ভাবলেন সাবঅ্যাটমিক কণার এই সুপারপজিশন বৈশিষ্ট্য আমাদের কম্পিউটিং সিস্টেম ব্যবহার করলে খুব দ্রুত একই সময়ে অনেকগুলি কাজ করতে পারবে।

তার এই ধারণা থেকেই কোয়ান্টাম কম্পিউটিং এর যাত্রা শুরু যা আমরা **আইবিএমের কিউ সিস্টেম ওয়ান কোয়ান্টাম কম্পিউটারে** দেখতে পাই।

এবার আমরা জানবো সাধারণ কম্পিউটার আর কোয়ান্টাম কম্পিউটার এর বেসিক প্রিন্সিপাল সম্পর্কে! ক্ল্যাসিক্যাল কম্পিউটারগুলি বাইনারি সংখ্যা বা বিট ব্যবহার করে বেস 0 এবং 1 সহ কাজ করে। প্রতিটি বিট 2 এর পাওয়ার ($2^0 = 1, 2^2 = 4, 2^4 = 16$, ইত্যাদি) উপস্থাপন করে। উদাহরণস্বরূপ, এক বিটে দুটি ইনপুট থাকতে পারে (0 এবং 1), দুই বিটে চারটি ইনপুট থাকতে পারে $(00, 01, 10, 11)$ ইত্যাদি। বিটের সংখ্যা বাড়ার সাথে সাথে সম্ভাব্য ইনপুটের সংখ্যাও বৃদ্ধি পায়। উদাহরণস্বরূপ, দশটি বিট 1,024টি ইনপুটের প্রতিনিধিত্ব করতে পারে এবং 16টি বিট 65,536টি ইনপুটের প্রতিনিধিত্ব করতে পারে। ট্রানজিস্টর হলো ক্লাসিক্যাল কম্পিউটারের বিল্ডিং ব্লক যা বিটের উপর ভিত্তি করে কাজ করে যেখানে 1 বোঝায় ট্রানজিস্টর চালু আছে এবং 0 বোঝায় এটি বন্ধ। মোদ্দাকথা বিট আর কিউবিটের মধ্যে পার্থক্য যদি বলি তাহলে বিট হলো হয় 0 অথবা 1 হতে পারে কিন্তু কিউবিট হলো একই সাথে 0 এবং 1 থাকতে পারে যা কোয়ান্টাম সুপারপজিশ নামে পরিচিত।



চিত্র ১: কোয়ান্টাম স্টেটে কিউবিট যেকোনো জায়গায় থাকতে পারে

ধরো, ক্ল্যাসিক্যাল বিট 0 যদি হয় পৃথিবীর উত্তর মেরু তাহলে নিঃসন্দেহে 1 হবে পৃথিবীর দক্ষিণ মেরু। কিন্তু কোয়ান্টাম সুপারপজিশনের কারণে একটি কিউবিটের অবস্থান এই মেরুগুলির মধ্যে সীমাবদ্ধ নয় তবে এর মধ্যে যে কোনও জায়গায় থাকতে পারে। সে ক্ষেত্রে কিউবিটকে কোয়ান্টাম মেকানিকসের ডিরাক নোটেশনের মাধ্যমে লেখা যায়: $\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{1}\rangle + \boldsymbol{\beta}|\mathbf{0}\rangle = |\boldsymbol{Q}\rangle$; যেখানে $\boldsymbol{\alpha}$ ও $\boldsymbol{\beta}$ হলো জটিল রাশি, যেগুলো দিয়ে 0 ও 1 এর অনুপাতিক হিসাব করে কিউবিট এর সঠিক দশা নির্ণয় করা যায়। আরও সহজে বোঝার জন্য একটি ইলেকট্রন কল্পনা করুন যেটি একই সাথে দুটি অবস্থায় থাকতে সক্ষম (যেমন, স্পিন আপ এবং স্পিন ডাউন)। যদিও একটি ক্ল্যাসিক্যাল বিটের জন্য দুটি অবস্থার প্রয়োজন হয় (0 এবং 1) যেখানে একটি কিউবিট দিয়ে এটি অর্জন করে। দুটি কিউবিট ব্যবহার করলে চারটি স্টেট পাওয়া যায় (00, 01, 10, 11), এবং আরেকটি কিউবিট যোগ করলে আটটি স্টেট পাওয়া যায় (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111)। অর্থাৎ একটি করে কিউবিট পূর্বেরটার সাথে যোগ করলে পূর্বের তুলনায় দ্বিগুণ হয়ে যাচ্ছে। আটটি কিউবিট বা এক কিউবাইট দিয়ে ক্লাসিক্যাল কম্পিউটিংয়ের 256টি ইনপুটের কাজ করানো যেতে পারে। বর্তমান সুপারকম্পিউটারগুলো যে হিসাব করতে দিনের পর দিন সময় নেয় (জীববৈজ্ঞানিক প্রক্রিয়াগুলোর সঠিক যান্ত্রিক বিশ্লেষণ ইত্যাদি), সেইসব কাজ কয়েক সেকেন্ডে সম্পন্ন করা সম্ভব ৫০ কিলোমিটার একটি কোয়ান্টাম কম্পিউটারের মাধ্যমে কম্পিউটারের মাধ্যমে।

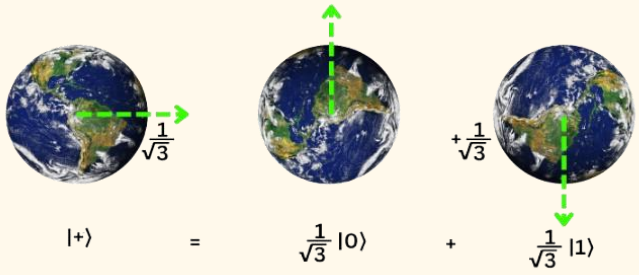
কোয়ান্টাম মেকানিক্সের দ্বিতীয় যে ধর্মটি এখানে কাজে লাগে তা হলো কোয়ান্টাম এন্ট্যাঙ্গেলমেন্ট। কোয়ান্টাম এনট্যাঙ্গলমেন্ট এমন একটি ঘটনা যেখানে কোয়ান্টাম কণাগুলি একে অপরের সাথে এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত হয় যে একটি কণার অবস্থা

সরাসরি অন্যটির অবস্থার উপর নির্ভর করে, তারা যত দূরেই থাকুক না কেন। তাদের মধ্যকার দূরত্ব এখানে কোনো ইফেক্ট ফেলেনা।

উদাহরণস্বরূপ, হাইড্রোজেন এবং হিলিয়াম পরমাণুর ক্ষেত্রে বিবেচনা করা যাক। একটি হাইড্রোজেন পরমাণুতে শুধুমাত্র একটি ইলেকট্রন থাকে, যার স্পিন হয় +½ বা -½ হতে পারে। পর্যবেক্ষণ না করা পর্যন্ত ইলেক্ট্রনের স্পিন কী হবে তা নিশ্চিতভাবে ভবিষ্যদ্বাণী করা অসম্ভব। হিলিয়ামের ক্ষেত্রে, যেখানে একই কক্ষপথে দুটি ইলেকট্রন রয়েছে, তাদের অবশ্যই পাউলি বর্জন নীতি মেনে চলতে হবে। এর মানে হলো যদি একটি ইলেকট্রনের একটি স্পিন +½ থাকে, অন্যটির অবশ্যই −½ এর স্পিন থাকতে হবে।

কোয়ান্টাম মেকানিক্সের চমকপ্রদ দিকটি হল যে যতক্ষণ না একটি ইলেকট্রন পর্যবেক্ষণ করা হয়, আমরা নিশ্চিতভাবে কোনো একটি ইলেক্ট্রনের স্পিন নির্ধারণ করতে পারি না। একবার একটি ইলেকট্রনের স্পিন পরিমাপ করা হলে, অন্য ইলেকট্রনের স্পিনও তাতক্ষণিকভাবে পাওয়া যায়। এই ঘটনাটিই কোয়ান্টাম এনট্যাঙ্গলমেন্ট।

কোয়ান্টাম কম্পিউটিংয়ে এনট্যাঙ্গলমেন্ট একাধিক কিউবিট জুড়ে সমান্তরালভাবে গণনা করে। এখন আসা যাক লজিক গেট সম্পর্কে। লজিক গেট এক ধরনের ডিজিটাল ইলেক্ট্রনিক বর্তনী যা বুলিয়ান বীজগণিত ব্যবহার করে বিভিন্ন ধরনের যৌক্তিক অপারেশন করে থাকে। লজিক গেট বলতে সাধারণত লজিক সার্কিটকে বুঝায় যাতে এক বা একাধিক বাইনারি ইনপুট এবং কেবল একটি আউটপুট থাকে।

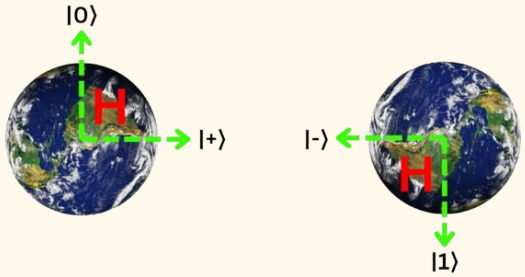


চিত্র ২: একটি ইলেক্ট্রনের স্পিন ধনাত্মক হলে অন্যটিকে অবশ্যই ঋণাত্মক হতে হবে।

মৌলিক লজিক গেট ৩ প্রকার। যথা:

- অ্যান্ড গেট (AND)
- অর গেট (OR) এবং
- নট গেট (NOT)

ক্ল্যাসিক্যাল কম্পিউটারে AND গেটের ভেতর দিয়ে যদি দুটি ইনপুট 0 ও 1 পাঠানো হয়, তখন 0 AND 0-0, 0 AND 1-0, 1 AND 0-0, 1 AND 1-1 পাই। যখন OR গেটের ভেতর দিয়ে পাঠানো হয়, তখন OR 0-0, 0 OR 1-1, 1 OR 0-1, 1 OR 1-1 পাওয়া যায়। আবার NOT গেটের ভেতর দিয়ে পাঠানো ইনপুট উল্টে যায়। যেমন ও NOT 1, 1 NOT-0 ইত্যাদি। কোয়ান্টাম লজিক গেটও প্রায় ক্লাসিক্যাল লজিক গেটের মতই, কিন্তু জটিলতা বেশী। কারণ কিউবিটের ইনপুটগুলি কোয়ান্টাম সম্ভাব্যতার উপর নির্ভর করে।



চিত্র ৩: হাডামার্ড গেট

তাই কোয়ান্টাম লজিক গেটগুলো সময় নির্ভর। সবচেয়ে পরিচিত কোয়ান্টাম গেট হল হাডামার্ড গেট বা এইচ গেট। এই কোয়ান্টাম গেটের নামকরণ করা হয়েছে ফরাসি গণিতবিদ জ্যাক হাডামার্ডের নামে। এই H গেট কিউবিট ইনপুটকে সুপারপজিশন ইনপুটে রূপান্তর করে। অর্থাৎ, একটি H কোয়ান্টাম গেটের মাধ্যমে 0 এবং 1 কিউবিট পাঠালে 0 এবং 1 এর একটি সুপারপজিশন অবস্থা তৈরি হবে। Controlled-NOT gate বা CNOT গেট হলো অন্য একটি মৌলিক কোয়ান্টাম গেট যা কোয়ান্টাম কম্পিউটিংয়ে ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়। ক্ল্যাসিক্যাল কম্পিউটিংয়ের Exclusive OR (XOR) গেটের মতোই কাজ করে CNOT কোয়ান্টাম গেট। এটা কন্ট্রোলড কিউবিট ইনপুটের কোনো পরিবর্তন ঘটায় না। কিন্তু এনট্যাঙ্গেলড কিউবিটের মান উল্টে দেয়। এছাড়া আরও অনেক ধরনের গেট রয়েছে এবং সুদূর ভবিষ্যতে আসবে।

এখন আসা যাক কিভাবে কোয়ান্টাম কম্পিউটার সমস্যা সমাধান করে।

- **কিউবিট নির্বাচন**: সমস্যা সমাধানের প্রথম ধাপ হলো প্রয়োজনীয় কিউবিট নির্বাচন করা। কিউবিট হলো ক্লাসিক্যাল বিটের কোয়ান্টাম এনালগ কিন্তু ক্লাসিক্যাল বিটের বিপরীতে তারা একটি স্টেটের সুপারপজিশনে থাকতে পারে।

- **কোয়ান্টাম লজিক গেটস**: একবার কিউবিট বাছাই করা হলে, কোয়ান্টাম লজিক গেট ব্যবহার করে এগুলো আটকানো হয়। তারা এমন কাজ সম্পাদন করতে পারে যা তাদের সুপারপজিশন এবং এনট্যাঙ্গলমেন্ট সহ কিউবিটের অবস্থা পরিবর্তন করে ফেলে।

- **ইনপুট নির্বাচন**: কিউবিটগুলিকে জড়ানোর পরে সিস্টেমটি কোয়ান্টাম অ্যালগরিদম অনুযায়ী কাজ করা শুরু করে। কিউবিটগুলি গণনা করার জন্য কোয়ান্টাম গেটগুলোর একটি সিরিজের মাধ্যমে ম্যানিপুলেট করা হয়।

- **প্রক্রিয়াকরণ**: যখন কিউবিটগুলো কোয়ান্টাম গেটগুলোর ভিতর দিয়ে যোগাযোগ করে তখন সুপারপজিশন এবং এনট্যাঙ্গলমেন্টের ঘটনাকে কাজে লাগিয়ে কোয়ান্টাম কম্পিউটেশন ঘটে যা ক্ল্যাসিক্যাল কম্পিউটার চেয়েও অসম্ভব গতিতে কাজ করে।

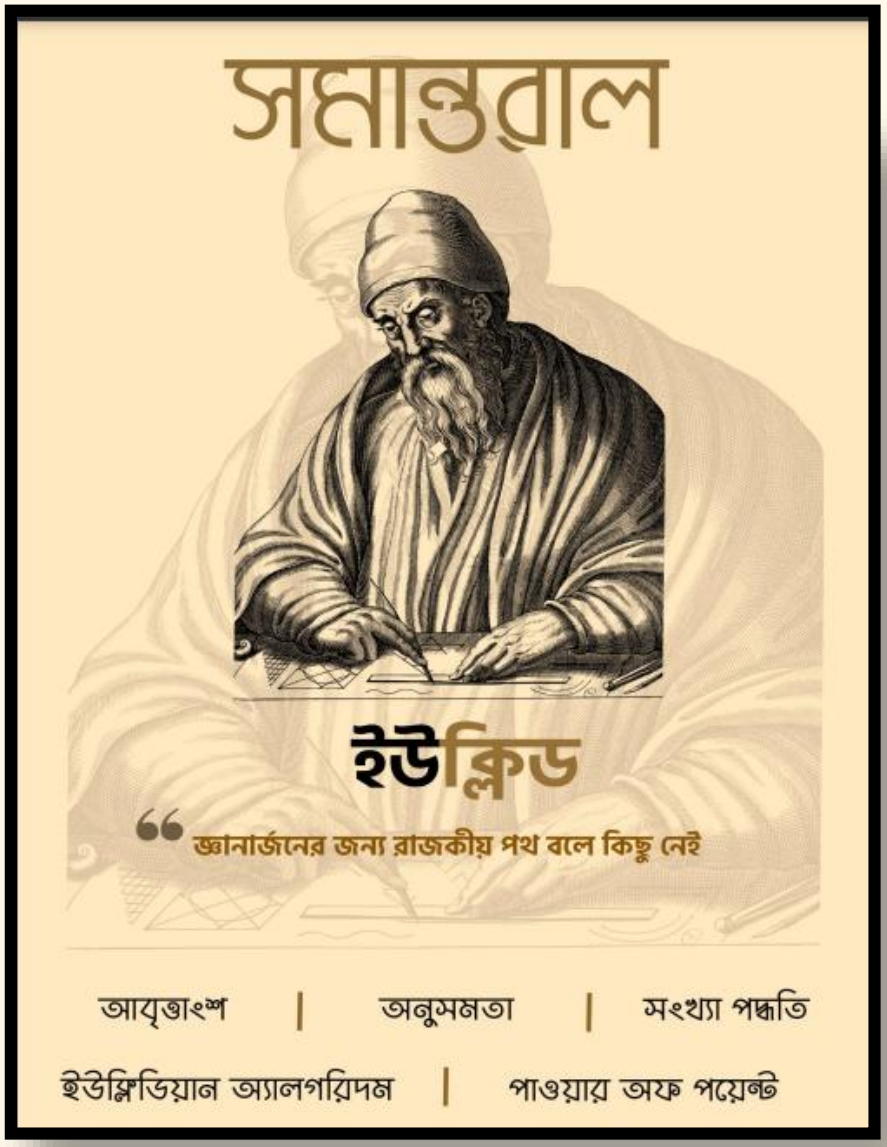
- **ফলাফল ডিকোডিং**: ডিজিটালে রূপান্তরত হওয়ার ফলে ক্লাসিক্যাল বিটের একটি সেট তৈরি হয়, যেগুলিকে গণনার আউটপুট প্রদানের জন্য বাইনারি থেকে ডিকোড করা হয়। এই আউটপুটটি ক্লাসিক্যাল কম্পিউটারে একটি ফাইল হিসাবে সংরক্ষণ করা হয়।

ক্লাসিক্যাল মেকানিক্স আর কোয়ান্টাম মেকানিক্স দুটো সম্পূর্ণ আলাদা। আজকের যুগে আমরা যে ইলেকট্রনিক ডিভাইস ব্যবহার করি এর মূল ভিত্তি হলো কোয়ান্টাম মেকানিকস, ক্লাসিক্যাল নয়। আর কোয়ান্টাম কম্পিউটিং এবং ক্লাসিক্যাল কম্পিউটারের মধ্যে যদি আমরা পার্থক্য খুঁজি তাহলে এটাকে আমরা তুলনা করতে পারি মোমবাতি আর লাইটের সাথে। আলো কিন্তু দুটোই আমাদের দেয় কিন্তু তাদের আলো দেওয়ার পিছনে যে মেকানিজম সেটা ভিন্ন। ক্লাসিক্যাল কম্পিউটার যদি হয় মোমবাতি তাহলে লাইট হচ্ছে কোয়ান্টাম কম্পিউটার। অর্থাৎ বুঝাই যাচ্ছে ক্লাসিক্যাল কম্পিউটারের তুলনায় কোয়ান্টাম কম্পিউটার কতটুকু শক্তিশালী এবং এটাও আন্দাজ করা যায় যে হাজারটি ক্লাসিক্যাল কম্পিউটার একসাথে কাজ করলেও কখনোই তা কোয়ান্টাম কম্পিউটারের

সমতুল্য কাজ সম্পাদন করতে পারবেনা। ধরো তোমাকে একটি কিউআর কোড এর ভেতর ছেড়ে দেওয়া হলো এবং বলা হলো এটা থেকে বের হয়ে আসতে। এখন তুমি যদি ক্লাসিক্যাল কম্পিউটার হও তাহলে একটার পর একটা পথ দেখতে দেখতে তোমার অনেক সময় লেগে যেতে পারে কিন্তু তুমি যদি কোয়ান্টাম কম্পিউটার হও তাহলে শুরুর জায়গা থেকে তোমার বেশ কয়েকটা কার্বন কপি এই কিউআর কোড এর ভেতর দিয়ে পথ খুঁজতে থাকবে অর্থাৎ তুমি একই সাথে সবজায়গায় রয়েছো এবং পথ খুঁজতেছো। যখন তোমার যেকোনো একটা কপি পথটা পেয়ে যাবে তখন তুমি বের হয়ে যেতে পারবে এবং এই সম্পূর্ণ কাজটা অত্যন্ত দ্রুতগতিতে সম্পন্ন হবে। ১৯৮৫ সালে অক্সফোর্ড বিশ্ববিদ্যালয়ের একজন পদার্থবিজ্ঞানী ডেভিড ডিউস এর কোয়ান্টাম কম্পিউটিং এর মেকানিজম নিয়ে একটি গবেষণা পত্র প্রকাশিত হওয়ার পরেই কোয়ান্টাম কম্পিউটিং বিষয়ক গবেষণা দ্রুত ত্বরান্বিত হতে থাকে। আর ১৯৯৪ সালে কোয়ান্টাম কম্পিউটারের জন্য প্রথম কোয়ান্টাম এলগরিদম লিখেছিলেন বেল ল্যাবরেটরির বিজ্ঞানী পিটার শোর।

এখন আসা যাক কিউবিট কিভাবে তৈরি করা হয় অর্থাৎ এর উপকরণ গুলো কি কি। এটি সাধারণত সিংগেল ফোটন বা ইলেক্ট্রন বা নিউক্লিয়াস একটি বিশেষ সার্কিটে রেখে তৈরি করা হয়। এবং এর কোয়ান্টাম সুপার পজিশন মেইনটেইন করে একে পরমশূন্য তাপমাত্রা কাছাকাছি রাখা হয় যেন তাপমাত্রা এদিক সেদিক কিংবা ইলেকট্রোম্যাগনেটিক ফিল্ড কিংবা বাইরের বাহ্যিক কোন আঘাতের দ্বারা এটি ক্ষতিগ্রস্ত নাহয় বা কোয়ান্টাম সুপার পজিশন স্টেট যেন ভেঙে না যায়।

যদি কিউবিটের সক্ষমতার কথা বলা হয়, তাহলে ৫০০ কিউবিট ব্যবহার করেই তুমি এত পরিমাণ তথ্য সংরক্ষণ করতে পারবে যা আমাদের পর্যবেক্ষণযোগ্য মহাবিশ্বে যতগুলো পরমাণু রয়েছে তার চেয়েও বেশি।



সমান্তরালের প্রথম সংখ্যা পড়তে ভিজিট কর https://somantoral.pages.dev/

আর হ্যাঁ, নিয়মিত আপডেট পেতে আমাদের ফেসবুক পেজ ফলো করতে ভুলোনা যেন!